

Федеральное агентство связи
Московский технический университет связи и информатики

Кафедра АИТСС

Л.В. Юрасова, В.Б. Крейнделин

Учебное пособие

Алгоритмы обработки сигналов в системах беспроводной
связи

Москва 2007

УДК: 621.391.037

Юрасова Л.В., Крейнделин В.Б. Алгоритмы обработки сигналов в системах беспроводной связи: Учебное пособие / МТУСИ.-М., 2007.-39с.

В учебном пособии рассматривается ряд алгоритмов обработки сигналов, которые используются в оборудовании современных систем беспроводной связи. В частности, рассматриваются дискретные преобразования Фурье и Уолша-Адамара, одномерный и многомерный фильтры Калмана.

Ил. 6, список лит. 12 назв.

Рецензент: **Мамзелев И.А.**, доктор технических наук, профессор

Издание утверждено на заседании факультета ИТ XX 2007 г.
Протокол №X

© Московский технический университет
связи и информатики

Содержание.

| | |
|---|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 4 |
| 1. БАЗОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ. | 5 |
| 1.1 ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. | 5 |
| 1.2. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША-АДАМАРА. | 8 |
| 2. БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ. | 11 |
| 2.1.АЛГОРИТМЫ И ИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ. | 11 |
| 2.2. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (БПФ). | 14 |
| 2.3. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША-АДАМАРА. | 18 |
| 2.4. АЛГОРИТМ ШТРАССЕНА ДЛЯ БЫСТРОГО УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ. | 21 |
| 2.5. ПОРЯДОК СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМА. АЛГОРИТМЫ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ. | 25 |
| 3. АЛГОРИТМЫ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ, НАБЛЮДАЕМЫХ НА ФОНЕ ШУМА..... | 26 |
| 3.1.ФИЛЬТРАЦИЯ СООБЩЕНИЙ В СИСТЕМАХ РАДИОСВЯЗИ. | 26 |
| 3.2. ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ. ОДНОМЕРНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА. | 31 |
| 3.3. ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ. МНОГОМЕРНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА. | 34 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ. | 37 |
| КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. | 38 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... | 38 |

Введение.

В связи с достижениями в области микроэлектроники и микропроцессорной техники в последние годы широкое применение находят цифровые системы беспроводной связи, в которых приём сообщений осуществляется с помощью обработки сигналов на основе цифровых вычислительных устройств. Это обусловлено тем, что цифровые устройства позволяют реализовать весьма сложные алгоритмы обработки сигналов, в том числе такие, которые трудно реализовать с помощью аналоговых устройств.

Цель данного методического пособия состоит в том, чтобы дать студенту общее представление о наиболее часто встречающихся в системах абонентского радиодоступа и в системах сотовой связи алгоритмах обработки сигналов.

В цифровых системах беспроводной связи обработке подвергаются сигналы с дискретным временем. Их можно получить из аналоговых сигналов взятием отсчётов в дискретные моменты времени в соответствии с теоремой Котельникова. Математически дискретный сигнал описывается функцией дискретного времени $s(i)$, $i=0,1,\dots,N-1$, где i – номер отсчёта; N - общее число отсчетов.

Помимо описания дискретного сигнала совокупностью его отсчётов существуют и другие способы его представления. В частности, при анализе и синтезе дискретных фильтров целесообразно использовать спектральную форму, т. е. представить сигнал в виде совокупности элементарных функций. Для этой цели используются системы дискретных базисных функций $\{\varphi_k(j)\}$, $j=0,1,\dots,N-1$; $i=0,1,\dots,N-1$.

Прямое и обратное обобщенное преобразования Фурье сигнала $s(i)$ определяются следующим образом:

$$c(k) = \frac{1}{P_{\varphi_k} N} \sum_{i=1}^{N-1} s(i) \varphi_k^*(i), \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \tag{1}$$

$$s(i) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) \varphi_k(i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

Здесь $c(k)$ - называется дискретным спектром

Выражения (1) удобно представлять в матричной форме:

$$C_{N \times 1} = \frac{1}{P_\varphi N} \Phi_N S_{N \times 1}; \quad S_{N \times 1} = \Phi'_N C_{N \times 1}, \quad (2)$$

где $C_{N \times 1}$ и $S_{N \times 1}$ – матрицы-столбцы размера $(N \times 1)$, составленные из коэффициентов c_k и отсчётов сигнала $s(i)$ соответственно; Φ_N – квадратная матрица преобразования порядка N , k -й строкой которой является базисная функция $\varphi_k^*(i)$; Φ'_N – квадратная матрица порядка N , получаемая из матрицы Φ_N её транспонированием и заменой элементов на комплексно-сопряжённые.

Среди различных дискретных спектральных преобразований в современной теории и технике цифровой радиосвязи нашли широкое применение дискретные преобразования Фурье, Уолша и Хаара. Дискретные преобразования применимы как для периодических сигналов, так и сигналов, заданных на конечном интервале. Конкретный вид дискретного преобразования определяется видом матрицы преобразования Φ_N .

1. Базовые алгоритмы обработки сигналов.

1.1 Дискретное преобразование Фурье.

В случае дискретного преобразования Фурье (ДПФ) в качестве системы базисных функций берётся система дискретных экспоненциальных функций

$$\varphi_k(i) = W_N^{ki}, \quad i=0, 1, \dots, N-1; \quad k=0, 1, \dots, N-1,$$

где $j = \sqrt{-1}$; $W_N = \exp(-j2\pi/N)$.

Функции W_N^{ki} являются ортогональными, т.е. удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{N-1} W_N^{ki} W_N^{-li} = \begin{cases} N, & \text{если } (k-l) = mN, \text{ где } m - \text{целое число,} \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

Действительно, если $k-l=mN$, то

$$\sum_{i=0}^{N-1} W_N^{ki} W_N^{-li} = \sum_{i=0}^{N-1} W_N^{mNi} = \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left\{-\frac{j2\pi mN}{N} i\right\} = \sum_{i=0}^{N-1} 1^{mi} = N$$

В противном случае

$$\sum_{i=0}^{N-1} W_N^{ki} W_N^{-li} = \sum_{i=0}^{N-1} W_N^{(k-l)i} = \frac{1 - W_N^{(k-l)N}}{1 - W_N^{k-l}} = \frac{1 - 1}{1 - W_N^{k-l}} = 0.$$

Функции W_N^{ki} являются периодическими с периодом N как по переменной k , так и по переменной i , т. е.

$$W_N^{ki} = W_N^{(k+N)i} = W_N^{k(i+N)}. \quad (4)$$

С помощью (1), прямое и обратное ДПФ можно записать как

$$c(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s(i) W_N^{ki}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (5)$$

$$s(i) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) W_N^{-ki}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Комплекснозначная числовая последовательность $c(k)$ представляет собой спектр исходного сигнала $s(i)$ в ортогональном базисе W_N^{-ki} .

Выражения (5) устанавливают взаимно однозначное соответствие между последовательностью отсчётов сигнала $s(i)$ и её спектром $c(k)$. Так как функции W_N^{ki} являются периодическими, то спектр дискретного сигнала также является периодическим: $c(k) = c(k+mN)$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Свойство периодичности спектра является характерной особенностью ДПФ.

Рассмотрим некоторые свойства ДПФ.

1. Свойство линейности:

$$\text{если } F[s_1(i)] = c_1(k) \text{ и } F[s_2(i)] = c_2(k), \quad i = k = 0, 1, \dots, N-1,$$

то $F[s_1(i) + s_2(i)] = c_1(k) + c_2(k)$, т. е. спектр суммы дискретных сигналов равен сумме их спектров.

2. Свойство комплексной сопряжённости:

если $F[s(i)] = c(k)$, $i = k = 0, 1, \dots, N-1$, причём N – чётное число, $s(i)$ – действительное, то

$$c(N/2+l)=c^*(N/2-l), l=0,1,\dots,N-1,$$

где $c^*(k)$ – величина, комплексно-сопряжённая $c(k)$.

3. Теорема запаздывания :

если $F[s(i)]=c(k)$, $i=k=0,1,\dots,N-1$, то $F[s(i+m)]=c(k)W^{km}$, где $m=1,\dots,N-1$.

4. Теорема о свертке:

ДПФ от свертки двух сигналов равно произведению ДПФ этих сигналов, т. е.

$$F\left[s_{1 \times 2}(m)\right]=\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s_1(i) s_2(m-i)=F\left(s_1(i)\right) \cdot F\left(s_2(i)\right), \quad m=0,1,\dots,N-1. \quad (6)$$

Рассмотрим связь между ДПФ и непрерывным преобразованием Фурье.

Пусть $s(t)$ – непрерывный сигнал с числом степеней свободы $N=2F_{max}T_c$, где F_{max} – максимальная частота в спектре $s(t)$; T_c – длительность сигнала $s(t)$.

Представим этот сигнал в виде ряда Котельникова

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} s(i\Delta t) \frac{\sin 2\pi F_{max}(t+i\Delta t)}{2\pi F_{max}(t+i\Delta t)} \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} s(i\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi F_{max}(t+i\Delta t)}{2\pi F_{max}(t+i\Delta t)} \exp(-j\omega t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Интеграл в (7) представляет собой спектральную плотность $F_\varphi(j\omega)$ сдвинутой функции отсчётов .

Поэтому

$$F(j\omega) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} s(i\Delta t) \exp(-ji\Delta t\omega), \quad (-2\pi F_{max} \leq \omega \leq 2\pi F_{max}).$$

Определим значения спектральной плотности в точках $\omega=k\Omega$, $k=0,\pm 1,\dots,\pm N/2$, $\Omega=2\pi/T_c$:

$$F(jk\Omega) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} s(i\Delta t) \exp(-ji\Delta tk\Omega) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} s(i\Delta t) \exp\left(-\frac{jik2\pi}{N}\right). \quad (8)$$

Сравнивая (5) и (8), получим

$$c(k) = \begin{cases} (1/T_c)F(jk\Omega), & k=0,1,2,\dots,N/2, \\ (1/T_c)F(j(-N/2+l)\Omega), & k=N/2+l, \quad l=1,2,\dots,N. \end{cases}$$

Установим связь между ДПФ и рядом Фурье. Замечая, что коэффициенты ряда Фурье и дискретные значения спектральной плотности сигнала удовлетворяют соотношению $c_k=F(jk\Omega)/T_c$, находим

$$c(k) = \begin{cases} c_k, & k=0,1,2,\dots,N/2, \\ c_{N/2+l}, & k=N/2+l, \quad l=1,2,\dots,N/2-1. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, в случае сигнала с конечным числом степеней свободы N коэффициенты $c(k)$, $k=0,1,\dots,N/2$, совпадают с коэффициентами ряда Фурье.

Дискретное преобразование Фурье удобно представить в матричной форме:

$$C_{N \times 1} = F_N S_{N \times 1} / N; \quad S_{N \times 1} = F'_N C_{N \times 1},$$

где F_N – квадратная матрица порядка N , элементы которой $f_{ki} = W_N^{ki}$; F'_N – квадратная матрица порядка N , получаемая из матрицы F_N с помощью её транспонирования и замены элементов на комплексно-сопряжённые*.

Дискретное преобразование Фурье применяется для вычисления спектров функций, заданных таблицами или графиками, обработки экспериментальных данных, а также нахождения сигнала на выходе дискретного фильтра.

1.2. Дискретное преобразование Уолша-Адамара.

В последние годы наряду с ДПФ в системах цифровой связи получило широкое распространение дискретное преобразование Уолша-Адамара (ДПУ).

В случае ДПУ в качестве системы базисных функций используется система дискретных функций Уолша $\{wal_k(i)\}$ $i=0, 1, \dots, N-1$, $k=0, 1, \dots, N-1$,

* Математически это означает, что матрица F'_N является сопряженной по Эрмиту по отношению к исходной матрице F_N .

причем $N=2^n$, где n – целое число. Рисунок 1 наглядно иллюстрирует построение первых восьми дискретных функций Уолша.

Функции $wal_k(i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, $k=0, 1, \dots, N-1$, являются ортогональными

$$\sum_{i=0}^{N-1} wal_k(i)wal_j(i) = \begin{cases} N & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (10)$$

и удовлетворяют условию мультипликативности $wal_k(i)wal_j(i) = wal_{k \oplus j}(i)$.

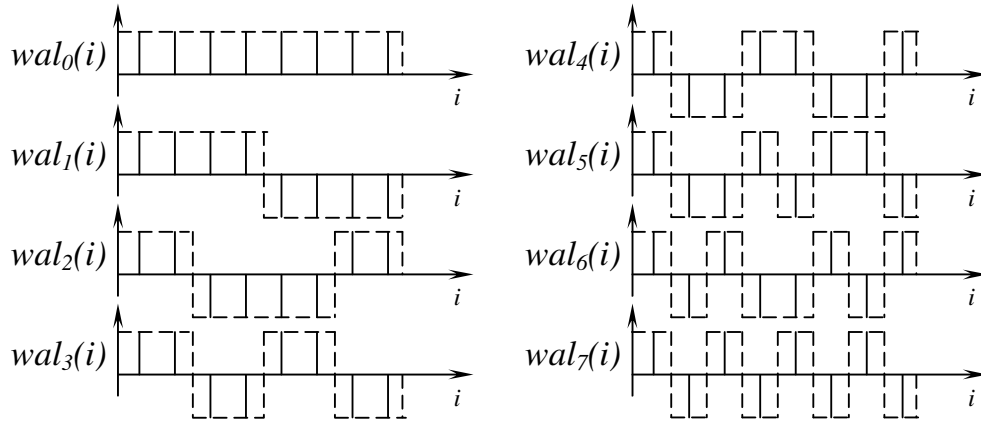


Рис. 1

Прямое и обратное ДПУ в соответствии с (1) определяются как

$$c(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s(i)wal_k(i),$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (11)$$

$$s(i) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k)wal_k(i),$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Так же, как и в случае ДПФ, спектр оказывается периодическим: $c(k)=c(k+mN)$, где m –целое число.

Однако ДПУ имеет существенные отличия от ДПФ. Это касается, в частности, теорем запаздывания и свертки. В случае ДПФ умножение спектральных коэффициентов $c(k)$ на функцию W^{-km} приводит к сдвигу номеров

отсчетов сигнала $s(i)$ на m единиц (к временному сдвигу последовательности отсчетов на m интервалов).

В случае ДПУ умножение спектральных коэффициентов $c(k)$ на $wal_k(m)$ приводит к так называемому диадному сдвигу последовательности отсчетов сигнала:

$$\begin{aligned} c(k)wal_k(m) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s(i)wal_k(i)wal_k(m) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s(i)wal_k(i \oplus m) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s(i \oplus m)wal_k(i) \end{aligned} \quad (12)$$

Запись $s(i \oplus m)$, $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, означает диадный сдвиг последовательности отсчетов сигнала $s(i)$, $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, на m интервалов; $i \oplus m$ – это десятичное число, двоичное представление которого определяется поразрядным сложением по модулю два двоичных представлений чисел i и m .

Заметим, что значение $(i \oplus m)$ при любых i и m не превышает число $N-1=2^n-1$. Поэтому при диадном сдвиге происходят перестановки отсчетов в пределах исходной совокупности. В качестве примера укажем, что если $N=16$, то отсчет с номером 7 при диадном сдвиге на 10 интервалов получает номер 13, а отсчет с номером 8 при том же диадном сдвиге получает номер 2.

Теорема о произведении спектра (или теорема о свертке) в случае ДПУ математически записывается как

$$c_1(k)c_2(k) = F[s_1 * s_2(i)] = F \left[\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s_1(j) s_2(i \oplus j) \right], \quad (13)$$

где $c_1(k)$, $c_2(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ – спектральные коэффициенты сигналов $s_1(i)$ и $s_2(i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, в базисе функций Уолша.

ДПУ, как и ДПФ, удобно представить в матричной форме

$$C_{N \times 1} = W_N S_{N \times 1} / N; \quad S_{N \times 1} = W'_N C_{N \times 1}, \quad (14)$$

где W_N – матрица преобразования Уолша порядка N , k -я строка которой совпадает с функцией $wal_k(i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$.

При $N = 8$

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица преобразований Уолша W_N является симметрической. Поэтому $W'_N = W_N$ и (14) можно записать как $S_{N \times 1} = W_N C_{N \times 1}$. Элементы матрицы преобразования Уолша принимают только значения ± 1 . Поэтому при вычислении как прямого, так и обратного ДПУ приходится выполнять лишь операции сложения и вычитания, т. е. отсутствует более трудоемкая операция умножения. В этом отношении ДПУ имеет большое преимущество по сравнению с ДПФ, при вычислении которого требуется производить умножение на комплексные числа $\exp(\pm j2\pi ki/N)$, причем действительную и комплексную части этих чисел приходится представлять большим числом разрядов для уменьшения ошибки вычисления. Поэтому, с точки зрения сложности реализации, алгоритм ДПУ является более простым, чем алгоритм ДПФ. Подробнее вопросы вычислительной сложности реализации различных алгоритмов обработки сигналов рассмотрены в разделах 2.1 и 2.5.

2. Быстрые алгоритмы обработки сигналов.

2.1. Вычислительная сложность алгоритмов.

Для оценки алгоритмов существует много критериев. Чаще всего нас будет интересовать порядок роста необходимых для решения задачи времени и емкости памяти при увеличении объема входных данных. Нам хотелось бы связать с каждой конкретной задачей некоторое число, называемое ее размером, которое выражало бы меру количества входных данных. Например, размером

задачи умножения матриц может быть наибольший размер матриц-сомножителей.

Время, затрачиваемое алгоритмом, как функция размера задачи, называется асимптотической временной сложностью.

Именно асимптотическая сложность алгоритма определяет в итоге размер задач, которые можно решить с помощью этого алгоритма. Если алгоритм обрабатывает входные данные размера n за время cn^2 , где c - некоторая постоянная, то говорят, что временная сложность этого алгоритма есть $O(n^2)$ (читается «порядка n^2 »). Точнее, говорят, что (неотрицательная) функция $g(n)$ есть $O(f(n))$, если существует такая постоянная c , что $g(n) \leq cf(n)$ для всех, кроме конечного (возможно, пустого) множества, неотрицательных значений n .

Можно было бы подумать, что колоссальный рост скорости вычислений, вызванный появлением нынешнего поколения цифровых вычислительных устройств, особенно устройств цифровой обработки сигналов, уменьшит значение эффективных алгоритмов. Однако происходит в точности противоположное. Так как вычислительные устройства работают все быстрее и мы можем решать более сложные задачи, именно сложность алгоритма определяет то увеличение размера задачи, которое можно достичь с увеличением скорости работы вычислительного устройства.

Здесь следует подчеркнуть, что при разработке современных систем цифровой радиосвязи имеет место тот факт, что сложность решаемых задач растет значительно быстрее производительности вычислительных устройств. Понятие вычислительной сложности вводится для того, чтобы классифицировать различные алгоритмы по степени сложности их практической реализации. Обычно в качестве критерия вычислительной сложности берут число операций (сложений, умножений, делений, сравнений и др.), необходимое для реализации данного алгоритма. Отметим, что вычислительная сложность зависит от типа процессора (вычислительного устройства), на котором реализован алгоритм.

Рассмотрим теперь некоторые способы уменьшения вычислительной сложности алгоритмов обработки сигналов. В качестве иллюстрации мы будем использовать рассмотренные в разделе 1.2 дискретные преобразования Фурье.

Непосредственное вычисление спектра сигнала по (5) требует выполнения большого числа операций и соответственно предъявляет высокие требования к быстродействию сигнального процессора. Так, в случае ДПФ необходимо произвести N^2 операций умножения и $(N-1)N$ операций сложения с комплексными числами. При больших значениях N число операций может оказаться недопустимо большим. Поэтому проблема разработки более рациональных алгоритмов вычисления ДПФ является весьма актуальной с практической точки зрения. Такие алгоритмы были найдены и получили название алгоритмов быстрых преобразований. Их применение значительно сокращает число арифметических операций, необходимых для вычисления спектра, а также объем памяти вычислительного устройства.

Известны различные варианты алгоритмов быстрых преобразований Фурье (БПФ), а также Уолша - Адамара (БПУ), Адамара (БПА), и др. Несмотря на многообразие этих алгоритмов, обусловленное различными подходами при их выводе, все они могут быть получены либо представлением одномерного массива отсчетов сигнала двумерным, либо факторизацией* матриц преобразований.

Первый метод состоит в разбиении исходной последовательности отсчетов на две вспомогательные более короткие последовательности, нахождении спектров этих вспомогательных последовательностей и определении по ним спектра исходной последовательности.

Можно показать, что суммарное число операций, необходимое для вычисления спектров вспомогательных последовательностей и определения по ним спектра исходной последовательности, оказывается меньше числа операций, которое требуется для вычисления спектра в соответствии (5).

Действительно, пусть исходная последовательность состоит из N отсчетов, причем N – четное число. Для вычисления ее спектра по (5) требуется выполнить N^2 умножений и $N(N-1)$ сложений.

Разобьем ее на две последовательности одинаковой длины. Для нахождения их спектров по (5) требуется выполнить $N^2/2$ умножений и

* Факторизация матрицы - это представление ее в виде произведения двух и более других матриц.

$N(N/2-1)/2$ сложений. Так как для пересчета спектров вспомогательных последовательностей в спектр исходной требуется небольшое число операций, то однократное применение процедуры позволяет сократить объем вычислений практически вдвое.

Для дальнейшего уменьшения числа операций описанную процедуру применяют многократно для нахождения спектров вспомогательных последовательностей.

Метод факторизации заключается в представлении матрицы преобразований Φ_N в виде произведения более простых, состоящих в основном из нулевых элементов, матриц*: $\Phi_N = \Phi_N^{(1)} \Phi_N^{(2)} \dots \Phi_N^{(k)}$, где k – число сомножителей числа N .

Соответственно коэффициенты $c(k)$ определяются матричным уравнением

$$C_{N \times 1} = \Phi_N^{(1)} \Phi_N^{(2)} \dots \Phi_N^{(k)} S_{N \times 1} / N. \quad (15)$$

Из (15) следует, что коэффициенты $c(k)$ определяются в несколько этапов: сначала находится матрица-столбец $S_{N \times 1}^{(1)} = \Phi_N^{(k)} S_{N \times 1}$, затем матрица-столбец $S_{N \times 1}^{(2)} = \Phi_N^{(k-1)} S_{N \times 1}^{(1)}$ и т. д., наконец, матрица-столбец $S_{N \times 1}^{(k)} = C_{N \times 1} = 1/N [\Phi_N^{(1)} S_{N \times 1}^{(k-1)}]$.

Экономия в числе операций достигается тем, что на каждом этапе производится сравнительно небольшое число операций, так как матрицы $\Phi_N^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, являются разреженными.

2.2. Быстрое преобразование Фурье (БПФ).

При изучении алгоритмов БПФ можно было бы исходить из общих позиций, указанных в предыдущем параграфе. Однако для облегчения понимания сущности БПФ рассмотрим частные случаи – алгоритмы БПФ с прореживанием по времени и по частоте. Оба алгоритма основаны на представлении одномерного массива отсчетов сигнала двумерным. Рассмотрим

* Матрицы, содержащие большое количество нулевых элементов и малое количество ненулевых элементов, называемые разреженными матрицами.

БПФ с прореживанием по времени. Пусть $\{s(i)\}$, $i=0, 1, 2, \dots, N-1$, – последовательность отсчетов сигнала, причем $N=2^n$, где n – целое число. Разобьем ее на две последовательности $\{s_1(i)\}$ и $\{s_2(i)\}$ таким образом, что $s_1(i)=s(2i)$, $i=0, 1, 2, \dots, N/2-1$; $s_2(i)=s(2i+1)$, $i=0, 1, 2, \dots, N/2-1$, т. е. $\{s_1(i)\}$ и $\{s_2(i)\}$ образуют соответственно из четных и нечетных членов последовательности $\{s(i)\}$.

С учетом (5) ДПФ сигнала $\{s(i)\}$ теперь можно представить в виде

$$\begin{aligned} c(k) &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i) W_N^{ki} + \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i+1) W_N^{(2i+1)k} = \\ &\quad \text{\textit{i}-четные} \qquad \qquad \qquad \text{\textit{i}-нечетные} \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i) W_N^{2ki} + \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i+1) W_N^{(2i+1)k} \end{aligned}$$

или, обращая внимание на то, что

$$W_N^2 = [\exp(-j2\pi/N)]^2 = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N/2}\right),$$

в виде

$$c(k) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} s_1(i) W_{N/2}^{ki} + \frac{2}{N} W_N^k \sum_{i=0}^{N/2-1} s_2(i) W_{N/2}^{ki} \quad (16)$$

Первое слагаемое в (16) есть спектр последовательности $\{s_1(i)\}$, а второе – спектр последовательности $\{s_2(i)\}$, умноженный на W_N^k . Таким образом,

$$c(k) = c_1(k) + c_2(k) W_N^k. \quad (17)$$

Так как $c_1(k)$ и $c_2(k)$ определены лишь для $0 \leq k \leq N/2-1$, то для нахождения коэффициентов $c(k)$, $k=N/2, N/2+1, \dots, N-1$, формулу (17) надо соответствующим образом доопределить. Учитывая периодичность функции

$$W_{N/2}^k, \text{ т. е. } W_{N/2}^{m+N/2} = W_{N/2}^m, \text{ а также то, что } W_N^{m+N/2} = \exp\left(-j2\pi \frac{m+N/2}{N}\right) =$$

$$\exp\left(-j2\pi \frac{m}{N}\right) \exp(-j\pi) = -\exp\left(-j2\pi \frac{m}{N}\right) = -W_N^m, \text{ окончательно находим}$$

$$c(k) = \begin{cases} c_1(k) + c_2(k) W_N^k, & 0 \leq k \leq N/2 - 1, \\ c_1(k - N/2) - c_2(k - N/2) W_N^{k-N/2}, & N/2 \leq k \leq N - 1. \end{cases} \quad (18)$$

Рассмотренная методика может быть применена для нахождения спектров $c_1(k)$ и $c_2(k)$, $k=0, 1, \dots, N/2-1$. При этом каждая из последовательностей $\{s_j(i)\}$, $j=1, 2$, разбивается на две под последовательности $\{s_{j1}(i)\}$ и $\{s_{j2}(i)\}$, $j=0, 1, \dots, N/4-1$, по тому же принципу, что и последовательность $s(i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$.

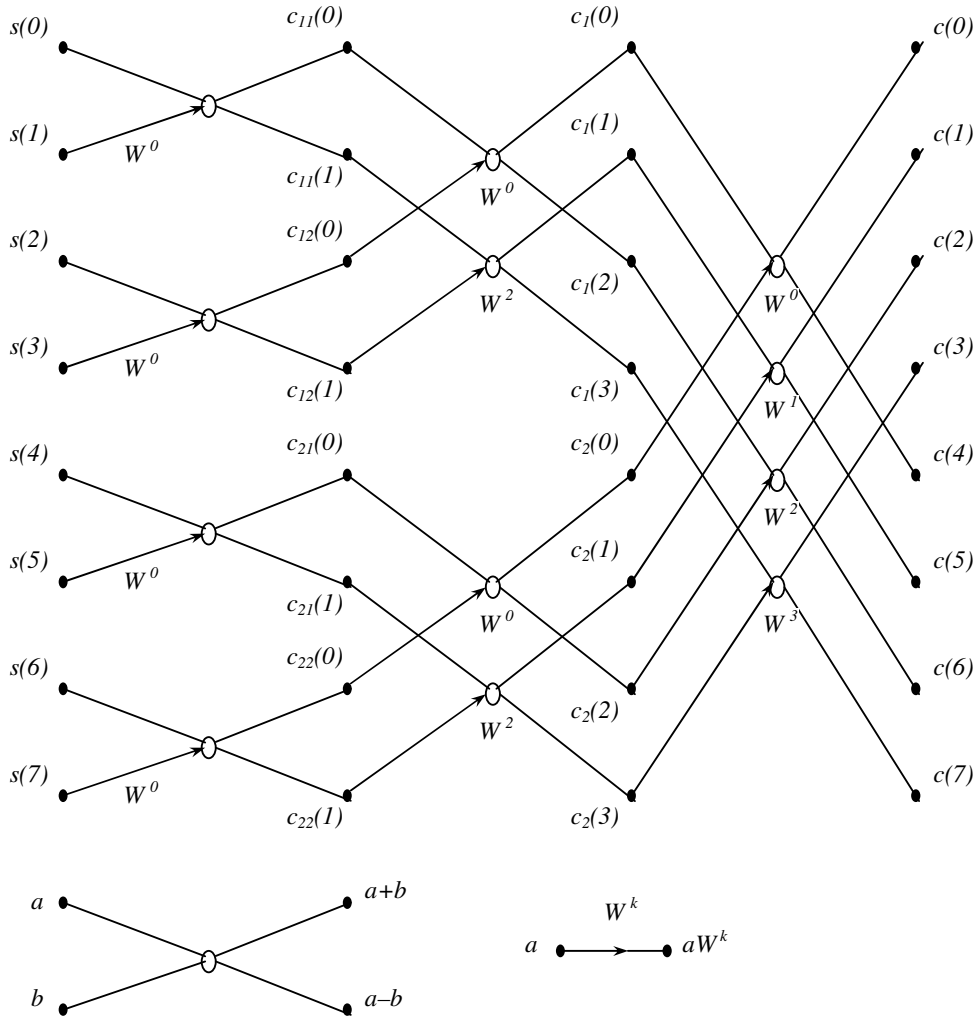


Рис2

Выражение для спектра $c_j(k)$, $j=1, 2$, запишется в виде $c_j(k)=c_{j1}(k)+W_{N/2}^k c_{j2}(k)=c_{j1}(k)+W_N^{2k} c_{j2}(k)$, $0 \leq k \leq N/2-1$, $j=1, 2$, где $c_{j1}(k)$ и $c_{j2}(k)$ – спектры последовательностей $\{s_{j1}(i)\}$ и $\{s_{j2}(i)\}$ соответственно. Процесс разбиения последовательностей продолжается до тех пор, пока каждая из них не будет содержать только два отсчета.

На рис. 2 с помощью направленного графа представлена последовательность выполнения операций в случае описанного алгоритма для

$N=8$. В нижней части рис.2 показана элементарная операция, на использовании которой основан описываемый алгоритм БПФ. Эта операция получила название 'бабочка'. В настоящее время существуют специализированные процессоры БПФ, в которых 'бабочка' выполняется за один такт.

Порядок следования отсчетов входной последовательности выбран таким образом, чтобы выходная последовательность $c(k)$ имела естественный порядок следования, т. е. $k= 0, 1, \dots, N-1$. Можно показать, что если $N=2^n$, n – целое число, то входная последовательность должна быть расположена в двоично-инверсном порядке, который определяется следующим образом. Порядковый номер отсчета входной последовательности записывают в двоичном коде, используя n разрядов. Затем порядок следования разрядов инвертируют (старший разряд становится младшим и т. д.). Десятичное число, соответствующее полученной двоичной комбинации, и является номером элемента входной последовательности после перестановки. Такая перестановка входных данных называется двоично - инверсной.

Для вычисления обратного ДПФ также можно использовать описанный алгоритм. Для этого составим выражение, комплексно-сопряженное со вторым уравнением в (5):

$$s^*(i) = \sum_{k=0}^{N-1} c^*(k)W^{ki}, \quad i= 0, 1, \dots, N-1. \quad (19)$$

Правая часть (19) с точностью до сомножителя $1/N$ представляет собой ДПФ последовательности $\{c^*(k)\}$, а следовательно, $s^*(i)$ можно вычислить, используя вышеописанный быстрый алгоритм. Зная $\{s^*(i)\}$ нетрудно осуществить переход к искомой последовательности $\{s(i)\}$.

Рассмотрим БПФ с прореживанием по частоте. В этом случае исходная последовательность разбивается на короткие последовательности следующим образом: $s_1(i)=s(i)$, $i= 0, 1, \dots, N/2-1$; $s_2(i)=s(i+N/2)$, $i= 0, 1, \dots, N/2-1$, т. е. $\{s_1(i)\}$ содержит первые $N/2$ членов последовательности $\{s(i)\}$, а $\{s_2(i)\}$ – остальные.

Преобразование Фурье последовательности $\{s(i)\}$ с учетом ее разбиения запишется как

$$c(k) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} s(i)W_N^{ik} + \frac{2}{N} \sum_{i=N/2}^{N-1} s(i)W_N^{ik} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} s_1(i)W_N^{ik} +$$

$$+\frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} s_2(i) W_N^{(i+N/2)k} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} [s_1(i)+s_2(i)\exp(-j\pi k)] W_N^{ik}. \quad (20)$$

Из (20) получаем для четных коэффициентов

$$c(2k) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} [s_1(i)+s_2(i)] (W_N^2)^{ik} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} [s_1(i)+s_2(i)] W_{N/2}^{ik} \quad (21)$$

и для нечетных коэффициентов

$$c(2k+1) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} \{[s_1(i)-s_2(i)] (W_N^i) W_{N/2}^{ik}\}. \quad (22)$$

Таким образом, коэффициенты $c(2k)$ и $c(2k+1)$ можно получить, зная спектры последовательностей $\{f(i)\} = \{s_1(i)+s_2(i)\}$, $i = 0, 1, \dots, N/2-1$, и $\{h(i)\} = \{s_1(i)-s_2(i)\}$, $i = 0, 1, \dots, N/2-1$. В свою очередь, спектры $c(2k)$ и $c(2k+1)$, $k = 0, 1, \dots, N/2-1$, можно вычислить по описанной выше методике, разбивая каждую из последовательностей $\{f(i)\}$ и $\{h(i)\}$ на две короткие по тому же принципу, что и последовательность $\{s(i)\}$. Процесс продолжается до тех пор, пока каждая из последовательностей не будет содержать только два отсчета.

Общее число операций, проводимых при вычислении спектра, в обоих рассмотренных алгоритмах одинаково и равно приблизительно $N \log N$. Таким образом, применение БПФ позволяет уменьшить число производимых операций приблизительно в $N/\log N$ раз. При больших значениях N число операций уменьшается весьма значительно. Например, при $N = 1024$ достигается ускорение вычислений в 100 раз. В заключение отметим, что алгоритмы БПФ могут быть получены также методом факторизации матрицы преобразований.

2.3. Быстрое преобразование Уолша-Адамара.

Быстрые алгоритмы преобразований Уолша существуют для любого способа упорядочения функций Уолша. Ниже рассматривается лишь быстрое преобразование Адамара (БПА). Алгоритм такого преобразования можно получить либо факторизацией матрицы Адамара A_N , либо ее разбиением. Будем

использовать второй метод как более наглядный и простой для понимания сущности алгоритма.

Напомним, что матрицей Адамара A_N порядка N называется квадратная матрица, получаемая с помощью рекуррентного соотношения:

$$A_N = \begin{Bmatrix} A_{N/2} & A_{N/2} \\ A_{N/2} & -A_{N/2} \end{Bmatrix}$$

$$A_1 = 1$$

Приведем вывод алгоритма БПА на конкретном примере. Пусть $s(i)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, – последовательность отсчетов сигнала, причем $N=8$. Тогда

$$\mathbf{C}_{8 \times 1} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_8 \mathbf{S}_{8 \times 1}. \quad (24)$$

Воспользовавшись (23), преобразование (24) перепишем в виде

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ c(1) \\ c(2) \\ c(3) \\ c(4) \\ c(5) \\ c(6) \\ c(7) \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} A_4 & A_4 \\ A_4 & -A_4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \\ s(4) \\ s(5) \\ s(6) \\ s(7) \end{Bmatrix}. \quad (25)$$

Следует отметить, что строки матрицы Адамара A_N представляет собой функции Уолша. Матрица Адамара A_N отличается от матрицы \mathbf{W}_N , приведенной в разделе 1.2., только порядком следования строк.

Выражение (25) можно разбить на два:

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ c(1) \\ c(2) \\ c(3) \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_4 \begin{Bmatrix} s_1(0) \\ s_1(1) \\ s_1(2) \\ s_1(3) \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} c(4) \\ c(5) \\ c(6) \\ c(7) \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_4 \begin{Bmatrix} s_1(4) \\ s_1(5) \\ s_1(6) \\ s_1(7) \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

где $s_1(i) = s(i) + s(i+4)$, $i = 0, 1, 2, 3$; $s_1(i) = s(i-4) - s(i)$, $i = 4, 5, 6, 7$.

Описанную методику применяем к каждому из преобразований (26). В результате имеем:

$$\begin{pmatrix} \|c(0)\| \\ \|c(1)\| \\ \|c(2)\| \\ \|c(3)\| \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 & -\mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|s_1(0)\| \\ \|s_1(1)\| \\ \|s_1(2)\| \\ \|s_1(3)\| \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \|c(4)\| \\ \|c(5)\| \\ \|c(6)\| \\ \|c(7)\| \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 & -\mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|s_1(4)\| \\ \|s_1(5)\| \\ \|s_1(6)\| \\ \|s_1(7)\| \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Каждое из преобразований (27) вновь представляем в виде двух выражений

$$\begin{pmatrix} \|c(0)\| \\ \|c(1)\| \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} \|s_1(0) + s_1(2)\| \\ \|s_1(1) + s_1(3)\| \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} \|s_2(0)\| \\ \|s_2(1)\| \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \|c(4)\| \\ \|c(5)\| \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} \|s_1(4) + s_1(6)\| \\ \|s_1(5) + s_1(7)\| \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} \|s_2(4)\| \\ \|s_2(5)\| \end{pmatrix}; \quad (28)$$

$$\begin{pmatrix} \|c(2)\| \\ \|c(3)\| \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} \|s_1(0) - s_1(2)\| \\ \|s_1(1) - s_1(3)\| \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} \|s_2(2)\| \\ \|s_2(3)\| \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \|c(6)\| \\ \|c(7)\| \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} \|s_1(4) - s_1(6)\| \\ \|s_1(5) - s_1(7)\| \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} \|s_2(6)\| \\ \|s_2(7)\| \end{pmatrix}.$$

Наконец, учитывая, что

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{получаем } c(0) &= [s_2(0) + s_2(1)]/8 = s_3(0)/8; & c(1) &= [s_2(0) - s_2(1)]/8 = s_3(1)/8; \\ c(2) &= [s_2(2) + s_2(3)]/8 = s_3(2)/8; & c(3) &= [s_2(2) - s_2(3)]/8 = s_3(3)/8; \\ c(4) &= [s_2(4) + s_2(5)]/8 = s_3(4)/8; & c(5) &= [s_2(4) - s_2(5)]/8 = s_3(5)/8; \\ c(6) &= [s_2(6) + s_2(7)]/8 = s_3(6)/8; & c(7) &= [s_2(6) - s_2(7)]/8 = s_3(7)/8. \end{aligned}$$

На рис.3 с помощью направленного графа представлена последовательность операций для описанного алгоритма.

Для реализации алгоритма требуются только операции сложения и вычитания. Общее их число равно 24.

В общем случае для любого $N=2^n$ последовательность операций такая же, как в рассмотренном примере. Общее число этапов вычисления коэффициентов $c(k)$, $k=0, 1, \dots, 2^n-1$, равно $\log_2 2^n = n$. На каждом i -м этапе участвует 2^{i-1} групп по $N/2^{i-1}$ элементов. Над половиной элементов каждой группы осуществляется операция сложения, над другой половиной – вычитания. Общее число производимых операций при вычислении всех коэффициентов спектра равно

$\log_2 N$. Выигрыш в числе операций по сравнению с прямым вычислением коэффициентов по формуле типа (11) составляет приблизительно $N/\log_2 N$ раз. При больших значениях N выигрыш может достигать сотен и тысяч раз. Алгоритм применим для вычисления обратного преобразования Уолша-Адамара.

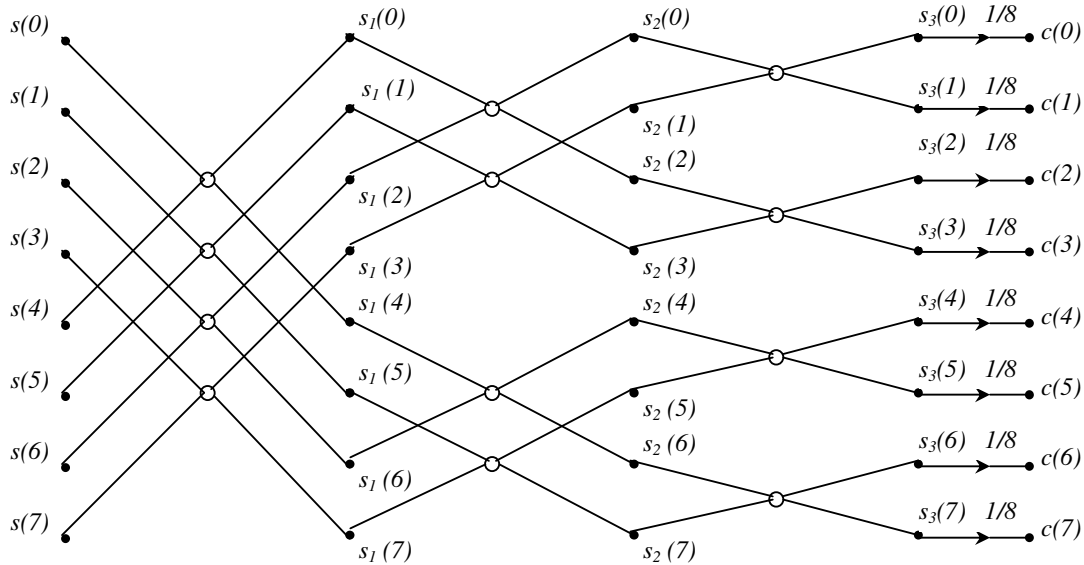


Рис 3

Быстрые преобразования Уолша-Адамара могут быть получены также методом факторизации матриц.

2.4. Алгоритм Штрассена для быстрого умножения матриц.

В оборудовании абонентского радиодоступа и подвижной радиосвязи широко используется такая операция как умножение двух матриц. В частности, эта операция используется на передающей стороне для формирования сигнала. Также умножение матриц используется и на приемной стороне в процессе подавления различных помех, возникающих радиоканала.

В этом разделе мы рассмотрим один алгоритм вычисления произведения 2-х матриц, имеющий меньшее количество операций умножения, чем традиционные алгоритмы. Рассмотрим сначала традиционные алгоритмы.

Пусть A и B – две $(N*N)$ – матрицы, причем N – степень числа 2. Можно разбить каждую матрицу A и B на четыре $((N/2)*(N/2))$ – матрицы и через них выразить произведение матриц A и B :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \quad (29)$$

где

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21},$$

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22},$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21},$$

$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}.$$

Если рассматривать A и B как $(2*2)$ – матрицы, элементами каждой из которых служат $((N/2)*(N/2))$ – матрицы, то их произведение можно выразить через суммы и произведения $((N/2)*(N/2))$ – матриц. Допустим, что C_{ij} вычисляются с помощью m умножений и a сложений (или вычитаний) $((N/2)*(N/2))$ – матриц. Рекурсивно применяя этот алгоритм, можно вычислить произведение двух $(N*N)$ – матриц за время $T(N)^*$, удовлетворяющее неравенству

$$T(N) \leq mT\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{aN^2}{4}, N > 2 \quad (30)$$

если N – степень числа 2. Первое слагаемое в правой части неравенства – это сложность умножения m пар $((N/2)*(N/2))$ – матриц, а второе – сложность выполнения a сложений при условии, что каждое сложение или вычитание двух $((N/2)*(N/2))$ – матриц требует $N^2/4$ времени.

Рассуждения показывают, что при $m > 4$ решение неравенства ограничено сверху величиной $kN^{\log(m)}$, где k – некоторая постоянная. Вид этого решения не зависит от a , т.е. от числа сложений. Таким образом, если $m < 8$, то мы получаем метод, асимптотически лучший обычного метода сложности $O(n^3)$.

* Здесь имеется в виду, что функция $T(N)$ есть вычислительная сложность алгоритма умножения двух матриц размерности N .

Штрассен изобрел весьма оригинальный метод умножения двух (2×2) – матриц с произвольными элементами, в котором достаточно семи умножений. Рекурсивно применяя свой метод, он можно перемножить две $(N \times N)$ – матрицы за время $O(N^{\log_2 7})$, что по порядку примерно равно $N^{2,81}$.

Можно показать, что произведение двух (2×2) – матриц с произвольными элементами можно вычислить, выполнив семь умножений и 18 сложений (вычитаний). Поясним это более подробно.

Пусть требуется вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Для этого сначала вычислим произведения

$$\begin{aligned} M_1 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}), \\ M_2 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}), \\ M_3 &= (A_{11} - A_{21})(B_{11} + B_{12}), \\ M_4 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}, \\ M_5 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}), \\ M_6 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}), \\ M_7 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}. \end{aligned} \quad (32)$$

Затем вычисляем C_{ij} по формулам

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_1 + M_2 - M_4 + M_6, \\ C_{12} &= M_4 + M_5, \\ C_{21} &= M_6 + M_7, \\ C_{22} &= M_2 - M_3 + M_5 - M_7. \end{aligned}$$

Число операций подсчитывается тривиально. Доказательство того, что в результате получаются требуемые величины C_{ij} , представляет собой простое алгебраическое упражнение.

Вопрос о числе операций решается следующим образом.

Покажем, что две $(N \times N)$ – матрицы с произвольными элементами можно перемножить за $O(N^{\log_2 7})$ арифметических операций.

Для доказательства этого утверждения сначала рассмотрим случай $N=2^k$. Пусть $T(N)$ – число арифметических операций, необходимых для умножения двух $(N \times N)$ – матриц. Тогда по доказанному выше утверждению имеем:

$$T(N) = 7T\left(\frac{N}{2}\right) + 18\left(\frac{N}{2}\right)^2 \quad \text{для } N \geq 2. \quad (33)$$

Следовательно, $T(N)$ составляет $O(7^{\log N})$, или $O(N^{\log 7})$.

Если n не является степенью числа 2, то нетрудно показать, что и в этом случае $T(N) = O(N^{\log 7})$.

Алгоритм Штрассена (31),(32) имеет смысл использовать, если N велико ($N > 40$) и время выполнения операции умножения значительно превышает время сложения (вычитания).

2.5. Порядок сложности алгоритма. Алгоритмы полиномиальной и экспоненциальной сложности.

Как было уже сказано в разделе 2.1, *вычислительная сложность алгоритма* – это количество элементарных операций, которое необходимо для реализации данного алгоритма. Отметим, что вычислительная сложность может существенным образом зависеть от порядка выполнения операций в данном алгоритме. Для иллюстрации этого факта приведем следующий пример: Пусть необходимо вычислить следующее произведение:

$$\vec{Y} = \bar{A} * \bar{B} * \vec{x} \quad (34)$$

где \bar{A}, \bar{B} - квадратные матрицы размерности $N \times N$, а \vec{x} - вектор столбец размерности $N \times 1$.

Вычисление величины Y в (34) можно вести двумя очевидными способами. Можно, например, сначала перемножить матрицы A и B , а затем их произведение C умножить на вектор X . Это составляет содержание Способа 1:

$$\text{Способ 1. } Y = (\bar{A} * \bar{B}) * \vec{x} = C * x: \quad (35)$$

Первый способ требует для вычисления элементов матрицы $C = A * B$

$$n_{\text{умн}} = N^2 * N = N^3 \text{ операций умножения}$$

$$n_{\text{слож}} = N^2 * (N - 1) \text{ операций сложения}$$

Теперь матрицу C необходимо умножить на вектор x . Для получения каждого элемента Y_j требуется сделать N умножений и $(N-1)$ сложений. Для $\vec{Y} = \bar{C} * \vec{x}$ нужно: $N * N$ умножений и $(N-1) * N$ сложений.

Итак, для $\vec{Y} = (\bar{A} * \bar{B}) * \bar{x}$ необходимо выполнить

$$n_{\text{умн}} = N^3 + N^2 = N^2 * (N + 1) \text{ операций умножения}$$

$$n_{\text{слож}} = N^3 - N^2 + N^2 - N = N^3 - N \text{ операций сложения.}$$

При таком порядке вычисления число умножений и сложений пропорционально третьей степени размерности матрицы, т.е. сложность алгоритма вычисления вектора \vec{Y} по способу 1 есть $O(N^3)$.

Рассмотрим теперь другой способ.

$$\text{Способ 2. } \vec{Y} = \bar{A} * (\bar{B} * \bar{x}) \quad (36)$$

Согласно (35) сначала вычисляется произведение $C = \bar{B} * \bar{x}$, а затем матрица \bar{A} умножается на вектор C . Подсчитаем число операций при данном порядке проведения вычислений.

Для вычисления $C = \bar{B} * \bar{x}$ требуется N^2 умножений и $N * (N - 1)$ сложений.

Для вычисления произведения $\bar{A} * C$ также требуется N^2 умножений и $N * (N - 1)$ сложений. Таким образом, при использовании Способа 2 (36) для вычисления вектора \vec{Y} всего требуется

$$n_{\text{умн}} = 2N^2 \text{ умножений}$$

$$n_{\text{слож}} = 2N(N - 1) \text{ сложений.}$$

При использовании (36) сложность алгоритма вычисления вектора \vec{Y} есть величина, пропорциональная второй степени размерности матрицы, т.е. $O(N^2)$. Отсюда можно сделать вывод о предпочтительности использования Способа 2 (36) для вычисления вектора \vec{Y} . Введем теперь понятие порядка сложности.

Порядок сложности характеризует зависимость между числом операций и некоторыми параметрами алгоритма (в данном случае порядком матрицы). Говорят, что алгоритм имеет полиномиальную сложность, если число операций в нём равно полиному некоторой степени от параметра алгоритма. Степень этого полинома называют порядком сложности.

Если число операций, необходимое для реализации алгоритма, пропорционально первой степени некоторого параметра, то такой алгоритм называется алгоритмом с линейной сложностью. На практике такие алгоритмы являются предпочтительными.

Одна из наиболее актуальных и важных задач обработки сигналов - снижение порядка сложности алгоритмов. Часто бывает так, что имеется алгоритм, обеспечивающий очень хорошие качественные характеристики оборудования связи, но обладающий при этом высокой сложностью. Из-за высокой сложности применить такой алгоритм не удастся.

Следует отметить, что множество алгоритмов обработки сигналов далеко не исчерпывается алгоритмами полиномиальной сложности.

Часто бывает так, что число операций увеличивается пропорционально экспоненте от параметра алгоритма. В этом случае говорят, что алгоритм имеет экспоненциальную вычислительную сложность.

Отметим, что число операций не всегда однозначно характеризует сложность алгоритма. Это связано с тем, что различные операции имеют различное время выполнения, к тому же зависящие от типа используемого сигнального процессора.

Например, некоторые процессоры не имеют аппаратного умножителя и поэтому операция умножения реализуется в них значительно медленнее операции сложения. В этом случае путь сокращения времени вычислений состоит в замене операций умножения операциями сложения, как это было с успехом сделано в алгоритме Штрассена.

В то же время использование алгоритма Штрассена для обработки сигналов с помощью сигнальных процессоров с одинаковым временем выполнения умножения и сложения, совершенно неэффективно.

Таким образом, вычислительная сложность алгоритма является величиной относительной, зависящей от типа сигнального процессора.

3. Алгоритмы фильтрации сигналов, наблюдаемых на фоне шума.

3.1. Фильтрация сообщений в системах радиосвязи.

Задача фильтрации сигнала (выделения из его смеси с шумом) в системах беспроводной связи является весьма важной. В достаточно общем виде ее можно сформулировать так. Пусть непосредственному наблюдению доступен

случайный процесс $\xi(t)$, являющийся детерминированной функцией от полезного сигнала $s(t, \lambda)$ и некоторой помехи $n(t)$:

$$\xi(t) = F(s(t, \lambda(t)), n(t)) \quad (37)$$

Полезный сигнал $s(t, \lambda(t))$ является функцией времени t и многокомпонентного сообщения $\lambda(t) = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)\}$ представляющего собой векторный случайный процесс.

Предполагаются следующие априорные сведения относительно наблюдаемого процесса $\xi(t)$: 1) известен способ комбинирования сигнала и помехи, т. е. конкретный вид функции $F(\cdot)$; 2) сигнал $s(t, \lambda(t))$ является известной функцией аргументов t и λ ; 3) известны все необходимые вероятностные характеристики случайного процесса $\lambda(t)$ и помехи $n(t)$. Располагая этими априорными сведениями, а также доступной непосредственному наблюдению реализацией случайного процесса $\xi(t)$ необходимо для каждого t сформировать апостериорную вероятность (плотность вероятности) сообщения $\lambda(t)$.

Обычно необходима не сама плотность вероятности, а оценка $\lambda^*(t)$, в некотором смысле наилучшая, например, оценка по максимуму апостериорной плотности вероятности. Однако отыскание оценок все равно требует в общем случае предварительного получения плотности вероятности.

При наблюдении процесса $\xi(t)$ на текущем интервале времени $[0, t]$ находится оценка $\lambda^*(t + \tau)$. Когда $\tau = 0$, имеем задачу текущей фильтрации, при $\tau > 0$ – задачу фильтрации с упреждением (предсказанием) или задачу экстраполяции, а при $\tau < 0$ – задачу фильтрации с запаздыванием или задачу интерполяции.

Наблюдаемый случайный процесс $\xi(t)$ следует трактовать как принимаемое колебание, случайный процесс – «параметр» $\lambda(t)$ – как полезное (информационное) сообщение или же совокупность полезного сообщения и других (сопутствующих) параметров, от которых зависит принятый сигнал $s(t, \lambda(t))$. Под помехой $n(t)$ можно понимать собственный шум приемного устройства и другие помехи, воздействующие на вход приемного устройства.

Укажем критерии оптимальности, применяемые в теории фильтрации. Будем пользоваться точечными оценками, когда величины, входящие в критерий качества оценки, относятся к одному рассматриваемому моменту времени t . Поскольку при фиксированном t случайный процесс вырождается в случайную величину, то в принципе можно пользоваться всеми критериями теории оценок параметров, например, оценкой по максимуму апостериорной плотности вероятности, оценкой по минимуму дисперсии и др.

Введем обозначение ξ_0^t для реализации $\xi(t)$, заданной на интервале $[0; t]$. Пусть $\lambda^*(t)$ есть некоторая оценка, построенная для момента времени t . Очевидно, что эта оценка будет случайной величиной (разной для различных реализации наблюдаемого процесса) по двум причинам: из-за случайного характера самого сообщения $\lambda(t)$ и из-за наличия в принимаемом колебании $\xi(t)$ помехи $x(t)$. Поэтому за критерий точности имеет смысл принять среднее (по множеству реализации) значение какой-нибудь функции ошибки. Применим критерий минимума средней квадратической ошибки:

$$\varepsilon^2(t) = M \{[\lambda(t) - \lambda^*(t)]^2\} = \min \quad (38)$$

Перепишем (38) в следующем виде:

$$\varepsilon^2(t) = \iint_{\lambda \xi} (\lambda - \lambda^*)^2 p(\lambda, \xi) d\lambda d\xi, \quad (39)$$

где $p(\lambda, \xi)$ – совместная плотность вероятности $\lambda(t)$ и ξ_0^t .

На основании правила умножения вероятностей выражение (1.3) можно записать иначе:

$$\varepsilon^2(t) = \int_{\xi} \left[\int_{\lambda} (\lambda - \lambda^*)^2 p(\lambda | \xi) d\lambda \right] p(\xi) d\xi \quad (40)$$

Очевидно, что для получения минимума ε^2 достаточно минимизировать внутренний интеграл

$$J = \int_{\lambda} (\lambda - \lambda^*)^2 p(\lambda | \xi) d\lambda,$$

т.е. обеспечить минимальное значение среднего квадрата ошибки при каждом

наблюдении. Из условия $\frac{dJ}{d\lambda} = 0$ имеем:

$$\int_{\lambda} (\lambda - \lambda^*) p(\lambda | \xi) d\lambda = 0.$$

Отсюда следует

$$\lambda^*(t) = \int_{\lambda} \lambda p(\lambda, \xi) d\lambda = M\{\lambda | \xi\} \quad (41)$$

Следовательно, оценкой, оптимальной по критерию минимума среднего квадрата ошибки, является условное математическое ожидание $M\{\lambda | \xi\}$, т.е. апостериорное математическое ожидание.

Часто рассматриваются наблюдения в следующем виде:

$$\xi(t) = s(t, \lambda(t)) + n_0(t), \quad (42)$$

где $n_0(t)$ – белый гауссовский шум (БГШ) с нулевым средним и односторонней спектральной плотностью N_0 . Случайное сообщение $\lambda(t)$ предполагается заданным стохастическим дифференциальным уравнением, например вида

$$\frac{d\lambda}{dt} = g(t, \lambda) + n_{\lambda}(t), \quad \lambda(0) = \lambda_0, \quad (43)$$

где $n_{\lambda}(t)$ – БГШ с нулевым средним и односторонней спектральной плотностью N_{λ} , λ_0 – начальное значение (детерминированное или случайное). Белые шумы $n_0(t)$ и $n_{\lambda}(t)$ считаются независимыми.

Белый гауссовский шум $n_{\lambda}(t)$, из которого формируется сообщение $\lambda(t)$, будем называть формирующим белым шумом, а устройство, описываемое уравнением (43) – формирующим фильтром сообщения.

В зависимости от вида наблюдения (42) и уравнения сообщения (43) следует различать два класса задач фильтрации.

- 1) Линейная фильтрация, если наблюдение (42) и сообщение (43) являются линейными относительно λ и начальное значение λ_0 имеет нормальное распределение. Если не ограничиваться конкретными уравнениями (42) и (43), то к линейной фильтрации относятся ситуации, когда двухкомпонентный процесс $\{\xi(t), \lambda(t)\}$ является гауссовским, в частности когда сигнал и помеха являются гауссовскими процессами и они взаимодействуют аддитивно. Если же по крайней мере один из этих

процессов негауссовский, или их взаимодействие не аддитивное, задача не относится к линейной фильтрации.

- 2) Нелинейная фильтрация, если наблюдение (42) и (или) сообщение (43) содержат нелинейные функции сообщения λ , а также если в задаче линейной фильтрации начальное значение λ_0 не является гауссовской случайной величиной.

Принятое колебание $\xi(t)$ и сообщение $\lambda(t)$ могут задаваться или обрабатываться в непрерывном или дискретном времени.

При этом возможны четыре варианта:

- 1) наблюдение $\xi(t)$ и сообщение $\lambda(t)$ заданы в дискретном времени (дискретная фильтрация)
- 2) наблюдение $\xi(t)$ и сообщение $\lambda(t)$ заданы в непрерывном времени (непрерывная или аналоговая фильтрация)
- 3) $\xi(t)$ задано в дискретном времени, а $\lambda(t)$ в непрерывном (непрерывно-дискретная фильтрация)
- 4) $\xi(t)$ задано в непрерывном времени, а $\lambda(t)$ в дискретном (дискретно-непрерывная фильтрация).

Далее будем рассматривать задачу фильтрации в дискретном времени будем считать заданными уравнения наблюдения и сообщения в виде:

$$\begin{aligned}\xi_v &= s(t_v, \lambda_v) + n_{0v}, \\ \lambda_v &= g(t_v, \lambda_{v-1}) + n_{\lambda v},\end{aligned}\tag{44}$$

где n_{0v} и $n_{\lambda v}$ – независимые дискретные белые гауссовские шумы.

Уравнения (42) и (43) относятся к частному случаю, когда наблюдения и сообщения только скалярные. В более общей форме априорные сведения о наблюдениях и сообщениях задаются векторными уравнениями

$$\begin{aligned}\xi_v &= \mathbf{s}(t_v, \lambda_v) + \mathbf{n}_{0v}, \\ \lambda_v &= \mathbf{g}(t_v, \lambda_{v-1}) + \mathbf{n}_{\lambda v}.\end{aligned}\tag{45}$$

Здесь \mathbf{n}_{0v} и $\mathbf{n}_{\lambda v}$ – последовательности векторных случайных величин, имеющих нулевые средние и корреляционные матрицы \mathbf{V}_v и Ψ_v , соответственно.

Необходимость рассмотрения задач многомерной фильтрации возникает в тех часто встречающихся практических ситуациях, когда имеется несколько каналов наблюдения и (или) сообщение является векторным или многокомпонентным. Например, в системах абонентского радиодоступа стандарта IEEE 802.16 используются методы разнесенной передачи и разнесенного приема сигналов. При этом полезный сигнал передается от передатчика к приемнику по нескольким независимым путям.

3.2. Линейная фильтрация. Одномерный фильтр Калмана.

Рассмотрим частный случай линейной фильтрации в дискретном времени, когда уравнения наблюдения и сообщения (44) являются линейными и заданы в виде скалярных разностных уравнений:

$$\xi_v = H_v \lambda_v + n_{0v} \quad (46)$$

$$\lambda_v = \beta_{v-1} \lambda_{v-1} + n_{\lambda v}, \quad \lambda(0) = \lambda_0,$$

где $H_v = H(t_v)$, $\beta_v = \beta(t_v)$ – заданные функции времени; n_{0v} и $n_{\lambda v}$ – дискретные БГШ с нулевыми средними и дисперсиями $D_{0v} = N_0 / 2\Delta$ и $D_{\lambda v}$, соответственно. Начальное значение λ_0 , является нормально распределенной случайной величиной с известной априорной плотностью вероятности $p_{pr}(\lambda_0)$.

Выражения для вычисления оптимальной оценки параметра λ_v имеют следующий рекуррентный вид:

$$\lambda_v = \beta_{v-1} \lambda_{v-1} + k_v (\xi_v - H_v \beta_{v-1} \lambda_{v-1}), \quad (47)$$

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{\beta_{v-1}^2 R_{v-1} + D_{\lambda v}} + \frac{H_v^2}{D_{0v}}, \quad (48)$$

$$k_v = H_v \frac{R_v}{D_{0v}}. \quad (49)$$

Уравнение (47) определяет алгоритм формирования оптимальной оценки, а уравнение (48) – эволюцию апостериорной дисперсии. Эти уравнения принято называть уравнениями фильтра Калмана. Структура этого фильтра приведена на Рис.4.

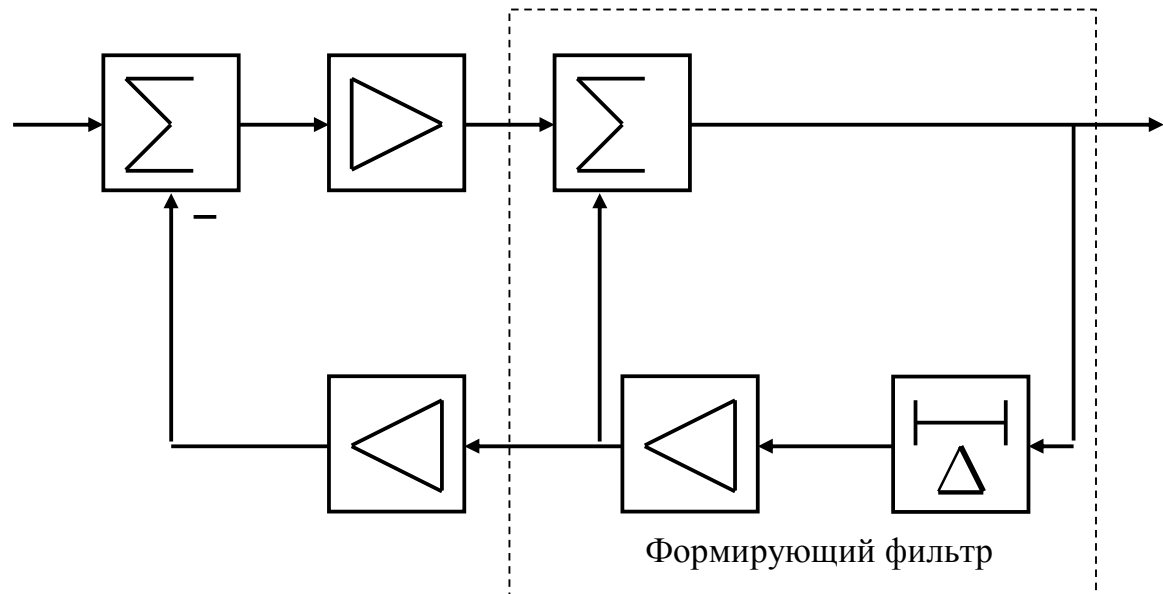


Рис. 4. Структурная схема фильтра Калмана.

В схеме фильтра Калмана, показанной на рис. 4, элемент задержки осуществляет запоминание предыдущей, $(v-1)$ -й, оценки до следующего, v -го, шага. Рисунок, как и поясняемый им рекуррентный (разностный) алгоритм (47) – (49), показывает, что фильтр Калмана является характерным примером линейной дискретной замкнутой астатической системы регулирования с переменными параметрами. Ее чувствительный элемент (дискриминатор) вырабатывает сигнал рассогласования (невязку) входных данных ξ_v и данных, поступающих по цепи обратной связи $H_v \beta_{v-1} \hat{x}_{v-1}$. После взвешивания рассогласование суммируется с ранее накопленным результатом.

Заметим, что в уравнение дисперсии (48) входят только известные функции времени t ; в отличие от (47) оно не содержит наблюдение ξ . Поэтому уравнение (48) может быть решено заранее, до начала работы фильтра,

вследствие чего функцию $R(t_v)$ и коэффициент $k(t_v)$ следует считать известными функциями времени.

Предположим, что наблюдения отсутствуют, т.е. $H(t_v)=0$. Тогда имеем:

$$\hat{\mathcal{K}}_v = \beta_{v-1} \hat{\mathcal{K}}_{v-1}. \quad (50)$$

Это есть уравнение экстраполированной оценки на один шаг, т.е. прогноза λ_v по априорным данным. В данном случае фильтр Калмана вырождается в фильтр, который обведен на рис. 4 штриховой линией. Это формирующий фильтр для передаваемого сообщения (46). Следовательно, априорные сведения о сообщении «заложены в конструкцию» оптимального фильтра.

Как следует из (47), располагая оценкой $\hat{\mathcal{K}}_{v-1}$ на предыдущем, $(i-1)$ шаге, фильтр Калмана, основываясь на уравнении сообщения (46) прогнозирует оценочное значение $\beta_{v-1} \hat{\mathcal{K}}_{v-1}$ на v -й шаг. По получении v -го наблюдения ξ_v прогнозируемая оценка подправляется на значение, пропорциональное невязке (обновляющему процессу), т.е. отклонению прогнозируемого слагаемого $H_v \beta_{v-1} \hat{\mathcal{K}}_{v-1}$ v -наблюдения в (46) от полученного отсчета ξ_v . Коэффициент пропорциональности, регулирующий вес новых данных (невязки) в λ_i по сравнению с прогнозом $\beta_{v-1} \hat{\mathcal{K}}_{v-1}$ называют коэффициентом усиления фильтра Калмана. Эта величина помимо коэффициента H_v в уравнении наблюдения и дисперсии шума наблюдения D_{0v} определяется еще и апостериорной дисперсией $R_{\lambda v}$ параметра λ_v . Последняя, как нетрудно показать, совпадает с квадратом разности оценки $\hat{\mathcal{K}}_v$ и истинного значения λ_v , усредненным по всем возможным шумам наблюдения, и, таким образом, характеризует точность оценки на v -м шаге.

На входе фильтра Калмана из принимаемого колебания ξ_v вычитается его предсказанная часть $H_v \beta_{v-1} \hat{\mathcal{K}}_{v-1}$. Из этой разности с весовым коэффициентом k_v и из априорных сведений $\beta_{v-1} \hat{\mathcal{K}}_{v-1}$ формируется оптимальная оценка $\hat{\mathcal{K}}_v$. Процедура получения оценки является рекуррентной, и поэтому очень удобной для реализации на ЭВМ.

Пример реализации фильтра Калмана для постоянной величины.

Пусть λ представляет собой случайную, но постоянную величину. Априорные сведения о ней можно задать в виде уравнения

$$\lambda_v = \lambda_{v-1} \quad (51)$$

являющегося частным случаем уравнения (46) при $\beta_{v-1} = 1$ и $n_{0v} = 0$. Примем, что начальное значение λ_0 нормально распределено с дисперсией R_{v_0} . Пусть

$$\xi_v = \lambda_v + n_v, \quad (52)$$

причем дисперсия шума n_v постоянна и равна D .

Уравнение (52) есть частный вариант уравнения (46) при $H_v = 1$. Применительно к данному случаю уравнение оптимального фильтра (47) приобретает вид

$$\hat{\kappa}_v = \hat{\kappa}_{v-1} + (R_v / D)(\xi_v - \hat{\kappa}_{v-1}) \quad (53)$$

Этот алгоритм моделируется фильтром, схема которого изображена на рис. 5.

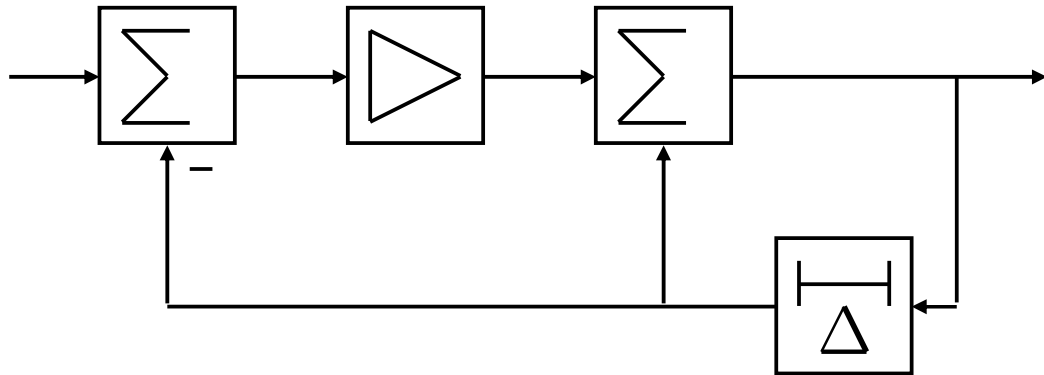


Рис. 5. Структура фильтра Калмана для постоянной величины.

3.3. Линейная фильтрация. Многомерный фильтр Калмана.

Пусть уравнения наблюдения и сообщения являются частными случаями уравнений (45):

$$\xi_v = \mathbf{H}_v \lambda_v + \mathbf{n}_{0v}, \quad (53)$$

$$\lambda_v = \mathbf{A}_{v-1} \lambda_{v-1} + \mathbf{n}_{\lambda v}. \quad (54)$$

Здесь $\mathbf{H}_v - (m \times n)$ – мерная матрица, $\mathbf{A} - (n \times n)$ – мерная матрица; \mathbf{n}_{0v} и $\mathbf{n}_{\lambda v}$ – последовательности взаимно независимых векторных белых гауссовских шумов с нулевыми мат. ожиданиями и корреляционными матрицами \mathbf{V}_v и $\mathbf{\Psi}_v$ размерности $m \times n$ и $n \times n$, соответственно.

Как и в скалярном случае, выражения для вычисления оптимальной оценки векторного параметра λ_v имеют следующий рекуррентный вид:

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}_v = \mathbf{A}_{v-1} \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{v-1} + \mathbf{K}_v (\xi_v - \mathbf{H}_v \mathbf{A}_{v-1} \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{v-1}), \quad (55)$$

где

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{R}_v \mathbf{H}_v^T \mathbf{V}_v^{-1}. \quad (56)$$

Корреляционная матрица ошибок удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\mathbf{R}_v^{-1} = [\mathbf{A}_{v-1}^T \mathbf{R}_{v-1} \mathbf{A}_{v-1} + \mathbf{\Psi}_v]^{-1} + \mathbf{H}_v^T \mathbf{V}_v^{-1} \mathbf{H}_v \quad (57)$$

Уравнения (55)–(57) являются уравнениями фильтра Калмана n -ого порядка для дискретного времени. В этих уравнениях матрица \mathbf{K}_v размерности $(m \times n)$ является матричным коэффициентом усиления фильтра Калмана.

Суть алгоритма (55)–(57) осталась прежней; экстраполированная с предыдущего шага оценка $\mathbf{A}_{v-1} \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{v-1}$ после получения v –го наблюдения ξ_v корректируется с учетом новой информации, заключенной в невязке $\xi_v - \mathbf{H}_v \mathbf{A}_{v-1} \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{v-1}$, вклад которой в $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_v$ определяется матричным коэффициентом усиления \mathbf{K}_v .

Пошаговый (рекуррентный) характер алгоритма Калмана, позволяющий получать текущую оценку корректировкой ее предыдущего значения с учетом только очередного v –го наблюдения, удобен для реализации на ЭВМ, особенно при необходимости фильтрации в реальном времени, т.е. по мере поступления данных. Коэффициент усиления \mathbf{K}_v как и характеристика точности оценки \mathbf{R}_v не зависят от входных данных и могут быть рассчитаны заранее для всех значений v и занесены в память ЭВМ, с тем чтобы извлекаться оттуда по мере надобности.

Основная трудность при реализации алгоритма (55)–(57) связана с большим объемом вычислений, требуемым для обращения матрицы в (57) даже

при использовании наиболее эффективных из известных методов при обращении матрицы размера $(n \times n)$ требуется порядка n^3 операций умножения.

На практике при разработке приемных устройств для систем беспроводной связи часто встречается случай, когда число каналов наблюдения (обычно это число приемных антенн) m меньше размерности вектора сообщения n . Для этого случая более простой является модификация алгоритма (57), основанная на использовании следующей известной леммы об обращении матриц.

Пусть \mathbf{R}, \mathbf{N} и \mathbf{H} – матрицы размера $n \times n$, $m \times m$ и $m \times n$ соответственно, причем \mathbf{R} и \mathbf{N} положительно определены. Тогда справедливо тождество

$$(\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H})^{-1} = \mathbf{R} - \mathbf{R} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{R} \mathbf{H}^T + \mathbf{N})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{R}. \quad (58)$$

Обращение обеих частей равенства (57) и применение к правой части леммы обращения матриц (58) дает

$$\mathbf{R}_v = \tilde{\mathbf{R}}_v - \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T (\mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T + \mathbf{V}_v)^{-1} \mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{R}}_v, \quad (59)$$

где

$$\tilde{\mathbf{R}}_v = \beta_{v-1}^T \mathbf{R}_{v-1} \mathbf{A}_{v-1} + \Psi_v.$$

В выражении (59) теперь фигурирует операция обращения матрицы лишь размера $m \times m$. При одноканальном приеме ($m = 1$) операция обращения матрицы вообще отсутствует.

Для получения формы алгоритма, требующего минимум вычислений, в выражении (56) для коэффициентов усиления \mathbf{K}_v используем соотношение (59):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_v &= \mathbf{R}_v \mathbf{H}_v^T \mathbf{V}_v^{-1} = \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T \mathbf{V}_v^{-1} - \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T (\mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T + \mathbf{V}_v)^{-1} \mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T \mathbf{V}_v^{-1} = \\ &= \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T (\mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T + \mathbf{V}_v)^{-1} [(\mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T + \mathbf{V}_v) \mathbf{V}_v^{-1} - \mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T \mathbf{V}_v^{-1}] = \\ &= \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T (\mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T + \mathbf{V}_v)^{-1}, \end{aligned} \quad (60)$$

где учтено, что выражение в квадратных скобках есть единичная матрица \mathbf{I} .

С учетом полученных выражений запишем итоговый алгоритм линейной фильтрации в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\kappa}}_v &= \mathbf{A}_{v-1} \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{v-1} + \mathbf{K}_v (\xi_v - \mathbf{H}_v \mathbf{A}_{v-1} \hat{\boldsymbol{\kappa}}_{v-1}), \\ \mathbf{R}_v &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_v \mathbf{H}_v) \tilde{\mathbf{R}}_v, \\ \tilde{\mathbf{R}}_v &= \mathbf{A}_{v-1}^T \mathbf{R}_{v-1} \mathbf{A}_{v-1} + \boldsymbol{\Psi}_v, \\ \mathbf{K}_v &= \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v^T (\mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{R}}_v \mathbf{H}_v + \mathbf{V}_v)^{-1}. \end{aligned} \quad (61)$$

Схема многомерного фильтра Калмана не отличается от схемы одномерного фильтра на рис. 4. (просто скалярные функции в случае многомерного фильтра заменяются их векторно-матричными аналогами) и изображена на рис. 6.

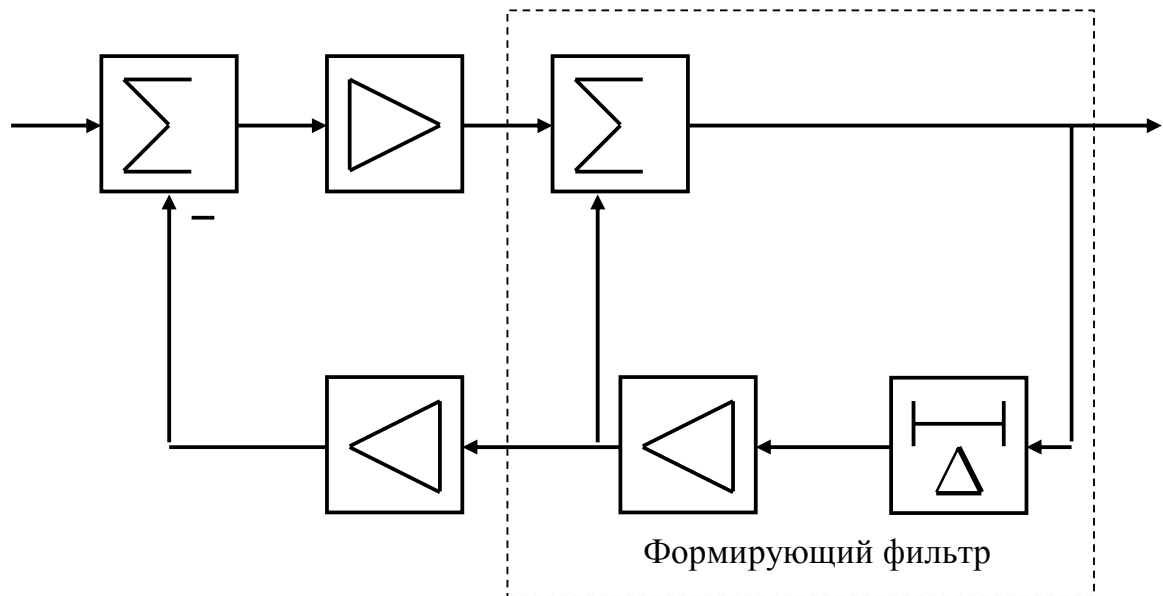


Рис. 6. Схема многомерного фильтра Калмана.

Следует отметить, что одномерный и многомерный фильтры Калмана широко используются в приемниках современных систем беспроводной связи в целях оценивания изменяющихся во времени параметров канала связи.

Заключение.

В данном методическом пособии рассмотрены лишь некоторые алгоритмы обработки сигналов, используемые в системах беспроводной связи. Вообще, проблема построения быстрых и одновременно эффективных алгоритмов является важнейшей проблемой, возникающей при разработке систем связи.

Актуальность этой проблемы еще более возрастает именно в наше время, когда при разработке систем связи требуется достигать их конкурентоспособности, т.е. наряду с высокими качественными характеристиками система должна иметь низкую стоимость. В свою очередь, низкая стоимость достигается использованием алгоритмов обработки сигналов с низкой вычислительной сложностью, позволяющих их реализовать с помощью недорогих сигнальных процессоров.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите определения и поясните значения понятий:
 - Дискретное преобразование Фурье,
 - Дискретное преобразование Уолша-Адамара.
2. Поясните необходимость построения быстрых алгоритмов обработки сигналов для оборудования беспроводной связи.
3. Поясните принцип построения быстрых алгоритмов обработки сигналов.
4. Приведите определения и поясните значение понятий:
 - Порядок сложности алгоритма,
 - Алгоритм полиномиальной сложности,
 - Алгоритм экспоненциальной сложности.
5. Поясните понятие «фильтрация сообщений».
6. Поясните принцип работы фильтра Калмана.

Список литературы.

1. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ. /под ред. И.Б. Фоменко - М.: Связь, 1980
2. Дядюнов Н.Г., Сенин А.И. Ортогональные и квазиортогональные сигналы. М.: Связь, 1977
3. Акимов П.С., Сенин А.И., Соленов В. И. Сигналы и их обработка в информационных системах. - М.: Радио и связь, 1994.
4. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. - М.: Наука, 1989.

5. Рабинер Л, Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. С англ./ под ред. Ю.Н. Александрова. - М.: Мир 1978.
6. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов: Пер. С англ./ под ред. Ю. В. Матиясевича, М. Мир, 1979.
7. Куприянов М.С., Матюшкин Б. Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. СПб. Политехника, 1999.
8. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д, Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник - М.: Радио и связь, 1985.
9. Левитин А. Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. Пер. с англ. М.: Вильямс, 2003.
10. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем.– М.: Радио и связь, 1991.
11. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. Пер. с нем. – М.: Наука, 1982.
12. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов.– М.: Радио и связь, 1983.